

No.1 写像の定義

この回のゴール

- 写像の定義（「各要素にただ1つ」対応させる）を述べ、与えられた対応が写像かどうか判定できる。
- 定義域・終域・値域の違いと、写像が等しいことの意味を説明できる。
- 像 $f(C)$ と逆像 $f^{-1}(D)$ を求められる。
- 像・逆像と和集合・共通部分の関係を示せる（像では共通部分が保たれないことを含む）。

■ 1. 写像とは

高校で学んだ関数 $y = f(x)$ は、「実数 x を1つ決めると、実数 y が1つ決まる」対応であった。この考え方を、数とは限らない一般の集合に広げたものが写像である。

定義 1 写像

集合 A の各要素 a に対して、集合 B の要素をただ1つ対応させる規則 f を、 A から B への写像といい、

$$f: A \rightarrow B, \quad a \mapsto f(a)$$

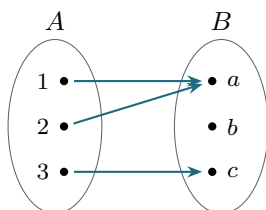
と書く。 A を f の定義域、 B を f の終域という。 a に対応する $f(a)$ を、 f による a の像（または a での f の値）という。

矢印は2種類ある。集合と集合の間は「 $\rightarrow$ 」、要素と要素の間は「 $\mapsto$ 」を使う。終域が数の集合（ $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ ）であるときは、写像を関数と呼ぶことが多い。

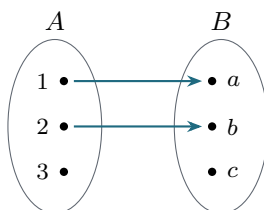
写像であるための条件は、次の2つである。

- **もれがない**： A のすべての要素に、行き先が決まっている。
- **ただ1つ**： A の1つの要素から、行き先が2つ以上に分かれしない。

B の側には条件がない。矢印が来ない要素があっても、2本以上の矢印が来る要素があってもよい。

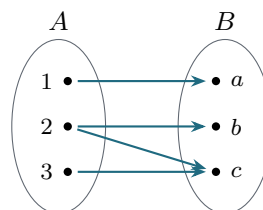


(a) 写像である



(b) 写像でない

(3 の行き先がない)



(c) 写像でない

(2 の行き先が2つ)

例 1

写像の例をいくつかあげる.

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. 高校で学んだ関数そのものである.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ は, 自然数 n に実数 a_n を対応させる写像 $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ と考えられる.
- (3) $m \times n$ 行列 A を使った $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ (分野「線形代数」第5章 No.1 の線形写像).
- (4) 2変数関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ (分野「微分積分」第3章 No.1). 定義域は直積 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ である.
- (5) 集合 X に対して, $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, $S \mapsto X \setminus S$ (補集合をとる写像). 定義域も終域も「集合の集合」である.

注意

- 「 $y = \pm\sqrt{x}$ 」は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像ではない. $x > 0$ では行き先が2つあり, $x < 0$ では行き先がないからである.
- 写像を考えると, **定義域と終域をセットで決める**. $f(x) = \frac{1}{x}$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像ではない (0 の行き先がない) が, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ から $\mathbb{R}$ への写像としては定まる.

■ 2. 写像の相等といろいろな写像

定義 2 写像の相等

2つの写像 $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow B$ が, **すべての $a \in A$ で $f(a) = g(a)$ をみたすとき**, f と g は**等しい**といい, $f = g$ と書く.

例 2

- (1) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ は, 式の形は違うが $f = g$ である. 写像は「式」ではなく「対応」で決まる.
- (2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ と $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ は, 値は同じだが終域が違うので, このシリーズでは**別の写像**とみなす. この区別は, No.2 で全射を考えると大切になる.

写像 $f: A \rightarrow B$ に対して, 直積 $A \times B$ の部分集合

$$G(f) = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$$

を f の**グラフ**という. $A = B = \mathbb{R}$ なら, 座標平面に描くいつものグラフである. 「各 $a \in A$ に対して, $(a, b) \in G$ となる $b \in B$ がただ1つある」ような部分集合 $G \subset A \times B$ は, ちょうど1つの写像のグラフになっている. そこで本によっては, 写像をこのような部分集合 G そのものとして定義する. 「規則」という言葉のあいまいさを避けるための工夫である.

定義 3 いろいろな写像

- (1) 恒等写像: $\text{id}_A: A \rightarrow A, a \mapsto a$. (本によっては $1_A, I_A$)
- (2) 定値写像: ある $b_0 \in B$ を決めて, $A \rightarrow B, a \mapsto b_0$.
- (3) 包含写像: $C \subset A$ のとき, $\iota: C \rightarrow A, c \mapsto c$.
- (4) 制限: $f: A \rightarrow B$ と $C \subset A$ に対して, $f|_C: C \rightarrow B, c \mapsto f(c)$.

恒等写像と包含写像は「何もしない」写像だが, 定義域・終域が違うので別の写像である. 制限は「定義域をせまくする」操作で, たとえば $\sin x$ を $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に制限すると, No.3 で逆写像 $\arcsin$ を考えられるようになる.

■ 3. 像と逆像

定義 4 像と逆像

写像 $f: A \rightarrow B$ について,

- $C \subset A$ に対して, $f(C) = \{f(c) \mid c \in C\}$ を f による C の像という.
- $D \subset B$ に対して, $f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$ を f による D の逆像 (または原像) という.

特に $f(A)$ を f の値域 (または像) といい, $\text{Im } f$ とも書く.

$f(C)$ は「 C の要素の行き先を集めたもの」, $f^{-1}(D)$ は「 D に入る要素を A から集めたもの」である. $y \in f(C)$ を示すには「 $y = f(c)$ となる $c \in C$ がある」ことを, $x \in f^{-1}(D)$ を示すには「 $f(x) \in D$ 」を示せばよい.

値域と終域

値域 $f(A)$ は終域 B の部分集合だが, 一般には B と一致しない. 本によっては終域のことを「値域」と呼ぶこともあるので, 教科書の言葉づかいを確認しよう. このシリーズでは「終域 B 」と「値域 $f(A)$ 」を区別する.

 f^{-1} の記号

逆像 $f^{-1}(D)$ は, **どんな写像に対しても**定義される. No.3 で学ぶ逆写像 f^{-1} が存在しなくてもよい. また, D が1点 $\{b\}$ のときは $f^{-1}(\{b\})$ を $f^{-1}(b)$ と略すこともある. これは「 $f(a) = b$ となる a 全体の集合」であって, 1つの要素とは限らない (空集合のこともある).

例 3

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ とする.

- (1) $f([-1, 2]) = [0, 4]$. ($-1 \leq x \leq 2$ のとき x^2 は 0 から 4 までのすべての値をとる.)
- (2) $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. ($1 \leq x^2 \leq 4$ を解く.)
- (3) $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}(\{9\}) = \{-3, 3\}$, $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$.
- (4) 値域は $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ で, 終域 $\mathbb{R}$ とは一致しない.

例題 1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ について, $f([0, 3])$ と $f^{-1}([0, 3])$ を求めよ.

【解答】 $f(x) = (x-1)^2 - 1$ なので, $0 \leq x \leq 3$ のとき, f は $x=1$ で最小値 -1 , $x=3$ で最大値 3 をとる. f は連続なので, その間のすべての値をとる (分野「微分積分」第1章 No.1 定理6 の中間値の定理). よって $f([0, 3]) = [-1, 3]$.

$f^{-1}([0, 3]) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x^2 - 2x \leq 3\}$ である. $x^2 - 2x \geq 0$ より $x \leq 0$ または $x \geq 2$. $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \leq 0$ より $-1 \leq x \leq 3$. 両方をみたす範囲を求めて, $f^{-1}([0, 3]) = [-1, 0] \cup [2, 3]$.

■ 4. 像・逆像と集合の演算

定理 1 逆像の性質

写像 $f: A \rightarrow B$ と $D_1, D_2, D \subset B$ について,

- (1) $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$
- (2) $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$
- (3) $f^{-1}(B \setminus D) = A \setminus f^{-1}(D)$
- (4) $D_1 \subset D_2$ ならば $f^{-1}(D_1) \subset f^{-1}(D_2)$

【証明】 (1) を示す. $x \in A$ について,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(D_1 \cup D_2) &\iff f(x) \in D_1 \cup D_2 \iff f(x) \in D_1 \text{ または } f(x) \in D_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2). \end{aligned}$$

(2), (3) も同様に示せる (練習問題 5). (4) は, $f(x) \in D_1$ なら $f(x) \in D_2$ であることから明らか. $\square$

逆像は, 和集合・共通部分・補集合をすべて保つ. これは集合族 $\{D_\lambda\}$ の和集合・共通部分でも同じである. この性質のおかげで, 位相空間論では「連続写像」を「開集合の逆像が開集合」として定義できる (分野「位相空間論」第2章 No.1).

定理 2 像の性質

写像 $f: A \rightarrow B$ と $C_1, C_2 \subset A$ について,

- (1) $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$
- (2) $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$
- (3) $C_1 \subset C_2$ ならば $f(C_1) \subset f(C_2)$

【証明】 (1) $y \in f(C_1 \cup C_2)$ とすると, $y = f(c)$ となる $c \in C_1 \cup C_2$ がある. $c \in C_1$ なら $y \in f(C_1)$, $c \in C_2$ なら $y \in f(C_2)$. 逆に $y \in f(C_1)$ なら $y = f(c)$ ($c \in C_1 \subset C_1 \cup C_2$) と書けるので $y \in f(C_1 \cup C_2)$. $y \in f(C_2)$ のときも同様.

(2) $y \in f(C_1 \cap C_2)$ とすると, $y = f(c)$ となる $c \in C_1 \cap C_2$ がある. $c \in C_1$ より $y \in f(C_1)$, $c \in C_2$ より $y \in f(C_2)$.

(3) $y = f(c)$, $c \in C_1$ なら, $c \in C_2$ でもあるので $y \in f(C_2)$. $\square$

像では共通部分の等号は成り立たない

定理 2 (2) の逆向き $\supset$ は一般に成り立たない. $f(x) = x^2$, $C_1 = [-1, 0]$, $C_2 = [0, 1]$ とすると,

$$f(C_1 \cap C_2) = f(\{0\}) = \{0\}, \quad f(C_1) \cap f(C_2) = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1].$$

証明 (2) を逆にたどろうとすると, 「 $y = f(c_1)$ ($c_1 \in C_1$), $y = f(c_2)$ ($c_2 \in C_2$)」の c_1 と c_2 が同じとは限らない, というところで止まる. $c_1 \neq c_2$ なのに $f(c_1) = f(c_2)$ となること ($f(-1) = f(1)$ など) が原因で, このようなことが起こらない写像を No.2 で「単射」と呼ぶ.

定理 3

写像 $f: A \rightarrow B$ と $C \subset A$, $D \subset B$ について,

$$(1) C \subset f^{-1}(f(C)) \quad (2) f(f^{-1}(D)) \subset D$$

【証明】 (1) $c \in C$ なら $f(c) \in f(C)$ なので, 逆像の定義より $c \in f^{-1}(f(C))$.

(2) $y \in f(f^{-1}(D))$ とすると, $y = f(x)$ となる $x \in f^{-1}(D)$ がある. $x \in f^{-1}(D)$ は $f(x) \in D$ ということなので, $y \in D$. □

どちらも等号は一般には成り立たない. $f(x) = x^2$ のとき, $f^{-1}(f([0, 1])) = f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1] \supsetneq [0, 1]$, $f(f^{-1}([-1, 1])) = f([-1, 1]) = [0, 1] \subsetneq [-1, 1]$ である. 等号が成り立つための条件は, No.2 の練習問題で考える.

コラム:「関数」とは式のことではない

18 世紀ごろまで, 「関数」とはおもに「式で書けるもの」のことだった. 19 世紀になってディリクレらは, 「各 x に値が 1 つ決まっていれば, どんな対応でもよい」という考え方を打ち出した. その代表例が

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

である (ディリクレ関数). グラフは描けないが, どの実数にも値がただ 1 つ決まるので, 立派な関数 (写像 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) である. こうした「変な関数」まで扱えるように数学を整える中で, 集合と写像の言葉が生まれてきた.

■ 練習問題

1. 次の規則は写像として定まっているか. 定まっていないものは, その理由を答えよ.

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

(2) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$

(3) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, f\left(\frac{m}{n}\right) = m \ (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$

(4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lceil x \rceil$ 「 x 以下の最大の整数」

2. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$ とする. A から B への写像は全部で何個あるか. また, $|A| = m, |B| = n$ の有限集合のとき, A から B への写像は何個あるか.

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ について, 次を求めよ.

(1) $f([0, \pi])$ (2) $f^{-1}(\{0\})$ (3) $f^{-1}([1, 2])$ (4) $f^{-1}((1, 2])$

4. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 2n$ について, 次を求めよ.

(1) $f(\mathbb{Z})$ (2) $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4\})$ (3) $f^{-1}(f(\{1, 2\}))$

5. 定理 1 (2), (3) を示せ.

6. 写像 $f: A \rightarrow B$ と $C_1, C_2 \subset A$ について, $f(C_1) \setminus f(C_2) \subset f(C_1 \setminus C_2)$ を示せ. また, 等号が成り立たない例をあげよ.

7. (考えてみよう) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$ とする. $f^{-1}(\{1\}), f^{-1}([0, 1]), f^{-1}(\{-1\})$ はそれぞれ座標平面のどんな図形か. また, 一般に 2 変数関数 f と実数 c について, $f^{-1}(\{c\})$ は何と呼ばれる図形か.

■ 練習問題の解答

1. (1) 定まっていない. $x = 0$ の行き先がない ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$ を定義域にすれば写像になる).
 (2) 定まっている.
 (3) 定まっていない. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ なのに, 前者からは 1, 後者からは 2 が出てきて, 行き先が 1 つに決まらない. このように「表し方によって値が変わらないか」を確かめることを, 写像が **well-defined** であるかを確かめる, という. (既約分数 $\frac{m}{n}$ で表すと約束すれば, 写像になる.)
 (4) 定まっている (ガウス記号 $[x]$, または床関数 $[x]$).
2. 1, 2, 3 のそれぞれについて, 行き先を a, b の 2 通りから選べるので $2^3 = 8$ 個. 一般には, m 個の要素それぞれについて行き先を n 通りから選べるので n^m 個. (A から B への写像全体の集合を B^A と書くことがある. $|B^A| = |B|^{|A|}$ という式が成り立つのが, この記号の由来である.)
3. (1) $[0, 1]$.
 (2) $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
 (3) $\sin x \leq 1$ なので, $\sin x \in [1, 2]$ となるのは $\sin x = 1$ のとき. $\{\frac{\pi}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
 (4) $\emptyset$.
4. (1) 偶数全体 $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
 (2) $2n \in \{1, 2, 3, 4\}$ となる整数 n は 1, 2. よって $\{1, 2\}$.
 (3) $f(\{1, 2\}) = \{2, 4\}$, $f^{-1}(\{2, 4\}) = \{1, 2\}$. (この f では定理 3 (1) の等号が成り立っている.)
5. (2) $x \in f^{-1}(D_1 \cap D_2) \iff f(x) \in D_1 \cap D_2 \iff f(x) \in D_1 \text{ かつ } f(x) \in D_2 \iff x \in f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.
 (3) $x \in f^{-1}(B \setminus D) \iff f(x) \in B \setminus D \iff f(x) \notin D \iff x \notin f^{-1}(D) \iff x \in A \setminus f^{-1}(D)$.
 ($x \in A$ なので $f(x) \in B$ は必ず成り立つことを使った.)
6. $y \in f(C_1) \setminus f(C_2)$ とすると, $y = f(c)$ となる $c \in C_1$ があり, $y \notin f(C_2)$. もし $c \in C_2$ なら $y = f(c) \in f(C_2)$ となり矛盾するので, $c \notin C_2$. よって $c \in C_1 \setminus C_2$ で, $y = f(c) \in f(C_1 \setminus C_2)$.
 等号が成り立たない例: $f(x) = x^2, C_1 = [-1, 1], C_2 = [0, 1]$ とすると, $f(C_1) \setminus f(C_2) = [0, 1] \setminus [0, 1] = \emptyset$ だが, $f(C_1 \setminus C_2) = f([-1, 0)) = (0, 1]$.
7. $f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は原点中心・半径 1 の円. $f^{-1}([0, 1]) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ は, その円の周と内部 (円板). $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.
 一般に $f^{-1}(\{c\}) = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$ は, $z = f(x, y)$ のグラフを高さ c で切った切り口を xy 平面に写したもので, **等高線** (レベル集合) と呼ばれる (多変数関数については分野「微分積分」第 3 章 No.1). 逆像は, 「関数の値がある範囲に入る点の集まり」を表すのにいつも使われている.